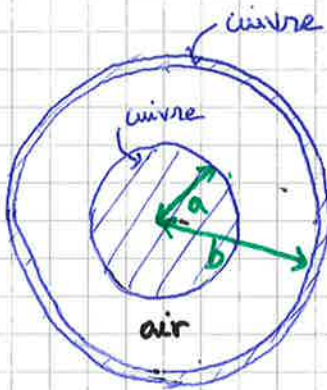
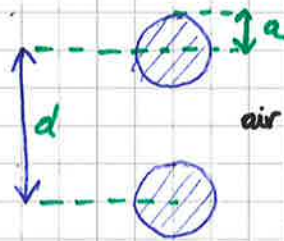
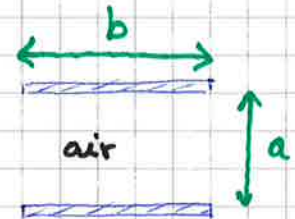


b) Paramètres des lignes de transmission courantes (C31)

Coaxiale



Bifilaire



Lames parallèles

formules: Voir cours.

*Exemple : ligne coaxiale RG58/U. En cuivre et remplie de Polyéthylène ($v_p = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$). $a = 0.45 \text{ mm}$, $b = 1.47 \text{ mm}$.

Trouver R , L , C , G et Z_0 à 3 GHz .

Même question si le conducteur est a) de l'argent, b) de l'acier inox.

$$R = \frac{4.15 \cdot 10^8 (0.45 + 1.47) \cdot 10^{-3} \sqrt{3 \cdot 10^9}}{(0.45 \cdot 10^{-3}) (1.47 \cdot 10^{-3})} = \begin{cases} \frac{6.6}{0.0192} = 343.75 \Omega/\text{m} \text{ (Acier)} \\ 6.6 \Omega/\text{m} \text{ (Cu)} \\ \frac{6.6}{1.06} = 6.22 \Omega/\text{m} \text{ (Ag)} \end{cases}$$

$$L = 0.237 \mu\text{H}/\text{m} = 0.2 \ln\left(\frac{1.47}{0.45}\right)$$

$$C = \left(\frac{c^2}{v_p^2}\right) \frac{55.6}{\ln(b/a)} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{55.6}{\ln(1.47/0.45)} = 106 \text{ pF}/\text{m}$$

$$G = \frac{7.35 \cdot 10^{-4}}{\ln\left(\frac{1.47}{0.45}\right)} = 6.21 \cdot 10^{-4} \text{ S}/\text{m}$$

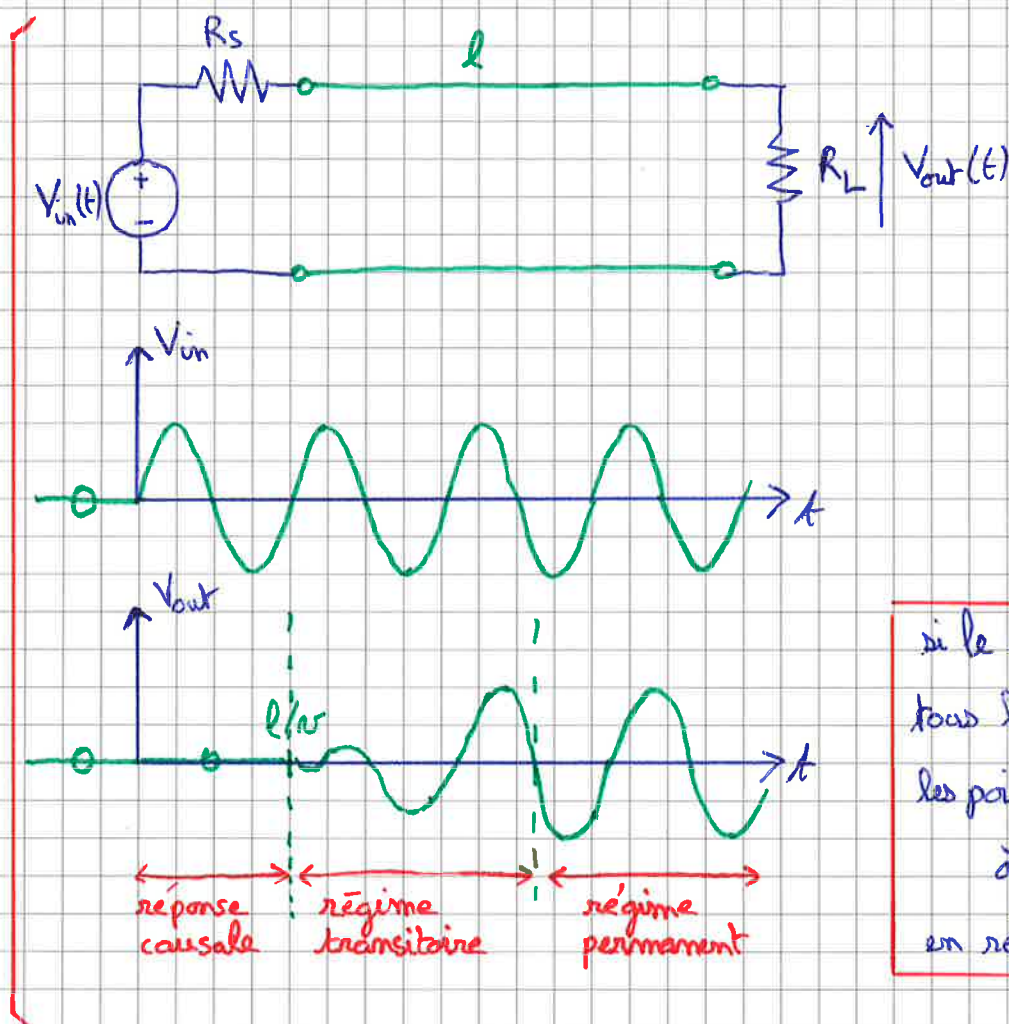
$$Z_0 = \frac{v_p}{c} 60 \ln \frac{b}{a} = 47.4 \Omega$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

III) Théorie des lignes de transmission : domaine fréquentiel

C32 - Excitation sinusoïdale



a) Ondes monochromatiques et phaseurs complexes

On étudie les solutions des équations des lignes de transmission sans pertes

$$\begin{cases} \frac{\partial V(z,t)}{\partial z} = -L \frac{\partial I(z,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial I(z,t)}{\partial z} = -C \frac{\partial V(z,t)}{\partial t} \end{cases}$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

qui ont la forme de sinusoides oscillant à ω :

$$\begin{cases} V(z,t) = V_0(z) \cos(\omega t + \phi_V(z)) \\ I(z,t) = I_0(z) \cos(\omega t + \phi_I(z)) \end{cases}$$

amplitude déphasage

i) Stratégie de résolution

Soit un système d'équa diff. réel linéaire:

$$\mathcal{L}_1(f) = \Delta_1 \quad \leftarrow \text{terme source}, \quad \Delta_1, f \in \mathbb{R}$$

opérateur linéaire différentiel solution recherchée

(Exemple: Les équations des lignes de transmission avec

$$f = \begin{pmatrix} V \\ I \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & L \frac{\partial}{\partial t} \\ C \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

On peut le considérer comme la partie réelle d'un système complexe

$$\mathcal{L}_1(f) = \Delta_1 + j \Delta_2$$

Si on sait résoudre le système complexe dans $\mathbb{C}$ alors la solution du système réel s'obtient à partir de la solution complexe en prenant la partie réelle:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(f_R + j f_I) &= \Delta_1 + j \Delta_2 \Rightarrow \mathcal{L}_1(f_R) + j \mathcal{L}_1(f_I) = \Delta_1 + j \Delta_2 \\ &\Rightarrow \mathcal{L}_1(f_R) = \Delta_1 \end{aligned}$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

(ii) Phaseurs complexes

$$\text{def} \quad \begin{cases} \mathcal{V}(z,t) = V_0(z) \cos(\omega t + \phi_V(z)) = \text{Re} \{ \underbrace{V(z)}_{\text{phaseurs}} e^{j\omega t} \} \\ \mathcal{I}(z,t) = I_0(z) \cos(\omega t + \phi_I(z)) = \text{Re} \{ \underbrace{I(z)}_{\text{phaseurs}} e^{j\omega t} \} \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{cases} V(z) = V_0(z) e^{j\phi_V(z)} \\ I(z) = I_0(z) e^{j\phi_I(z)} \end{cases}$$

(iii) Equations pour les phaseurs

$$* \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} = -L \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \text{Re} \{ V e^{j\omega t} \} = -L \frac{\partial}{\partial t} \text{Re} \{ I e^{j\omega t} \}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (V e^{j\omega t}) \right\} = -L \frac{\partial}{\partial t} (I e^{j\omega t}) \\ \text{et de m\^e} \left\{ \text{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (I e^{j\omega t}) \right\} = -C \frac{\partial}{\partial t} (V e^{j\omega t}) \right\} \end{cases}$$

Les eq^{ts} des LT sont la partie réelle d'un système complexe $\Rightarrow$
on re  out

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} (V e^{j\omega t}) = -L \frac{\partial}{\partial t} (I e^{j\omega t}) \\ \frac{\partial}{\partial z} (I e^{j\omega t}) = -C \frac{\partial}{\partial t} (V e^{j\omega t}) \end{cases}$$

et on prend la partie réelle de la solution:

$$\begin{cases} \mathcal{V} = \text{Re} \{ V e^{j\omega t} \} \\ \mathcal{I} = \text{Re} \{ I e^{j\omega t} \} \end{cases}$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial z} e^{j\omega t} = -L j\omega I e^{j\omega t} \\ \frac{\partial I}{\partial z} e^{j\omega t} = -C j\omega V e^{j\omega t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} &= -j\omega L I \\ \frac{\partial I}{\partial z} &= -j\omega C V \end{aligned}}$$

Équations pour les phasors

Rq1: Plus de dépendance temporelle

Rq2: Valable seulement pour des signaux monochromatiques à ω

Rq3: $V \leftrightarrow V$, $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow j\omega$, $\frac{\partial}{\partial z} \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z}$ pour passer aux phasors.

(iv) Solutions et interprétation (C33)

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -j\omega L I \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -j\omega L \frac{\partial I}{\partial z} = (-j\omega)(-j\omega C) V$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -(\omega^2 LC) V} \quad \text{version phasor de l'équation d'onde}$$

Notons $\boxed{\beta = \omega \sqrt{LC} = \omega / v_p}$ $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \beta^2 V = 0$

$$\Rightarrow \boxed{V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z}}$$

$$I = \frac{j}{L\omega} \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{j}{L\omega} (-j\beta) (V^+ e^{-j\beta z} - V^- e^{j\beta z}) = \frac{\beta}{L\omega} [V^+ e^{-j\beta z} - V^- e^{j\beta z}]$$

$$\frac{\beta}{L\omega} = \frac{\omega \sqrt{LC}}{L\omega} = \frac{1}{\sqrt{L/C}} = \frac{1}{Z_0}$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

$$\Rightarrow I(z) = \frac{1}{Z_0} (V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z})$$

Interprétation:

$$V(z, t) = \operatorname{Re}(V(z) e^{j\omega t}) = V^+ \cos(\omega t - \beta z) + V^- \cos(\omega t + \beta z)$$

$\uparrow$ onde sinusoïdale de propagant vers $+z$ à la vitesse $v_p = \frac{\omega}{\beta}$
 $\uparrow$ idem vers $-z$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{vitesse de phase.}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\lambda \omega}{2\pi} = \frac{2\pi f \lambda}{2\pi} = f \lambda, \quad \lambda \text{ longueur d'onde}$$

} voir C6

